- Supposons que pour un entier donné n : $0 < U_n + 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^n$

et montrons que $0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^{n+1}$

on a : $0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}(U_n + 1) \Rightarrow 0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^n$

$\Rightarrow 0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^{n+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n + 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^n$.

c) On a : $-1 < \frac{2\sqrt{5}}{5} < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^n = 0$

d'où $\lim_{n \to +\infty} (U_n + 1) = 0$ $\lim_{n \to +\infty} U_n = -1$.

Solution 16 :

A)

1°/ a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 + 1 > 0$ d'où f est définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$, $f_n(-x) = (-1)^n f_n(x)$

- Si n est pair, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(-x) = f_n(x)$ d'où f_n est une fonction paire.
- Si n est impair, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(-x) = -f_n(x)$ d'où f_n est une fonction impaire.

b) •Si n = 1 , $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$

D'où (C_1) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation y = 1 et au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation y = -1 .